Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 38, núm. 2, 2023. Pàg. 143–164. DOI: 10.2436/20.2002.01.111

Dos teoremes i una demostració de Dennis Sullivan

Núria Fagella i Joan Porti

Resum: El 1983 Dennis Sullivan tancà un problema de dinàmica holomorfa, sobre aplicacions racionals de l'esfera de Riemann, que feia més de seixanta anys que estava obert. Amb les mateixes tècniques va fer una nova demostració d'un teorema d'Ahlfors sobre grups kleinians, i va iniciar un període d'intensa activitat i interacció entre les dues àrees.

Paraules clau: dinàmica holomorfa, transformació racional, domini errant, grup kleinià, superfície de Riemann.

Classificació MSC2020: 37F31, 37F32, 30F40.

1 Introducció

Dels dos teoremes als quals fem referència en el títol de l'article, un és sobre grups kleinians i l'altre sobre dinàmica holomorfa. I parlem d'una única demostració perquè el 1983 Sullivan resolgué el cèlebre problema de Fatou-Julia sobre dominis errants, en dinàmica holomorfa, i essencialment amb el mateix argument donà una nova demostració del teorema de finitud d'Ahlfors, en grups kleinians. D'aquesta manera començava una intensa col·laboració entre les dues àrees, i ho volem explicar en aquest article.

Comencem per la teoria de *grups kleinians*, iniciada a finals del segle XIX amb els treballs de Felix Klein [18] i Henri Poincaré [30] (que li donà el nom en honor de Klein). Un grup kleinià Γ és un grup discret de transformacions de Möbius, o homografies, de l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$, és a dir, aplicacions de la forma $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$. Quan parlem de l'*òrbita* d'un punt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, ens referim al conjunt $\Gamma z := \{\gamma(z),\ \gamma \in \Gamma\}$. Per a tot grup kleinià Γ tenim una partició *dinàmica* de l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en dos conjunts *invariants*

$$\widehat{\mathbb{C}} = \Lambda(\Gamma) \sqcup \Omega(\Gamma),$$

Aquest article ha estat escrit amb el suport de (1) l'Agencia Estatal de Investigación a través dels projectes PID2020-118281GB-C32 i PID2021-125625NB-100 i el programa Severo Ochoa i María de Maeztu per a centres i unitats d'excel·lència en R + D CEX2020-001084-M; (2) la Generalitat de Catalunya a través del projecte 2021-SGR-01015 i el programa ICREA Acadèmia 2020.

on $\Lambda(\Gamma)$ (tancat) denota el *conjunt límit* o conjunt de punts d'acumulació d'una òrbita $\Gamma z \subset \hat{\mathbb{C}}$ qualsevol (no depèn de l'òrbita escollida), mentre que el seu complementari $\Omega(\Gamma)$ és l'obert conegut com a *conjunt ordinari*, o *normal*, o també com a *domini de discontinuïtat*, ja que Γ actua de manera pròpiament discontínua a $\Omega(\Gamma)$ (és a dir, totes les òrbites són conjunts discrets de punts a $\Omega(\Gamma)$). Sovint, el conjunt límit d'un grup kleinià és un conjunt fractal, com per exemple el de la figura 1.

FIGURA 1: Exemple de conjunt límit d'un grup kleinià. (Font: Chris King.)

A la dècada de 1960 hi va haver contribucions molt rellevants amb els treballs de Lars Ahlfors i Lipman Bers [1, 2, 3], que, inspirant-se en resultats previs de Teichmüller, van desenvolupar la teoria de deformacions quasiconformes per a grups kleinians, relacionant-los amb les superfícies de Riemann. Un dels principals teoremes és el *teorema de finitud d'Ahlfors* [1], un dels dos protagonistes del text que ens ocupa. Aquest resultat estableix que el quocient del domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$ per l'acció del grup Γ té un nombre finit de components que són superfícies de Riemann de *tipus finit*, és a dir, conformement equivalents a una superfície compacta menys un nombre finit de punts.

Paral·lelament, a començaments del segle XX, i motivats per processos iteratius com els generats pel mètode de Newton, així com per les solucions d'equacions funcionals, Pierre Fatou ([13]) i Gaston Julia ([16]) desenvoluparen la teoria d'iteració de funcions holomorfes. En aquest context, si $f = P/Q$ és una funció racional (irreductible) de grau $d \geq 2$, on $d = \text{grau}(f) = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$, l'*òrbita* d'un punt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ ve donada per l'aplicació successiva de f, que dona lloc a la successió

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_n, \dots\},$$

on $z_n := f^n(z_0) := f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f(z_0)$, per a $n \geq 1$. Observem que, a diferència de la situació anterior, aquí les òrbites venen amb una relació d'ordre, i ens preocupem, doncs, del seu comportament asimptòtic quan n tendeix a infinit. Anàlogament al cas dels grups kleinians, l'esfera de Riemann també es descompon en dos conjunts totalment invariants (és a dir, invariants per f i per les diferents branques de f^{-1}),

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathcal{J}(f) \sqcup \mathcal{F}(f),$$

on $\mathcal{F}(f)$ denota el *conjunt normal* o de *Fatou* o conjunt de punts per als quals la successió d'iterats $(f_n)_n$ és equicontínua (o normal), mentre que el seu complementari, $\mathcal{J}(f)$, es coneix avui com a *conjunt de Julia*, i és el conjunt en què f té un comportament *caòtic* (vegeu la figura 2). Intuïtivament, podem veure l'analogia del conjunt de Julia amb el conjunt límit d'un grup kleinià considerant el grup generat per les diferents branques de la inversa de f (allà on estiguin ben definides), $\Gamma = \langle f_1, \dots, f_d \rangle$, ja que, en efecte, es dona que $\mathcal{J}(f)$ coincideix amb els punts d'acumulació de l'òrbita de qualsevol punt sota l'acció de Γ (en el sentit definit anteriorment).

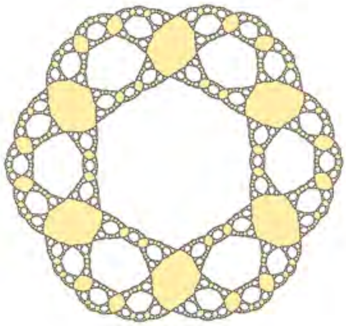

FIGURA 2: En negre, el conjunt de Julia de la funció $f(z) = z^3 - \frac{0.12}{z^3}$.

Fent ús de la teoria de famílies normals, que Paul Montel ([24]) havia desenvolupat feia poc, Fatou i Julia van arribar a obtenir una classificació exhaustiva dels possibles components connexos *periòdics* del conjunt de Fatou, és a dir, d'aquells components $U \subset \mathcal{F}(f)$ tals que $f^p(U) = U$ per a alguna $p \geq 1$. Van deixar oberta, no obstant això, la possible existència dels *dominis errants*, és a dir, components del conjunt normal que no fossin periòdics ni antiimatges de components periòdics. Aquest problema, junt amb d'altres, va romandre obert durant més de seixanta anys, un període letàrgic de la dinàmica complexa en espera de noves eines per seguir avançant.

El 1985 Sullivan va publicar la solució del problema de Fatou-Julia sobre dominis errants. En un article excepcional [33], Sullivan no només resolia aquesta qüestió de dinàmica holomorfa que feia tant temps que estava oberta, sinó que, amb un argument molt semblant (usant deformacions quasiconformes), feia una nova demostració del teorema de finitud d'Ahlfors. La demostració de Sullivan va descobrir punts en comú entre els dos temes de recerca i donà lloc al que s'anomena *diccionari de Sullivan*, que estableix analogies entre objectes, resultats i idees dels dos camps.

L'impacte que va tenir aquest resultat va ser majúscul, no tant pel teorema en si mateix (que també), sinó perquè va obrir vasos comunicants entre dues àrees que fins aleshores s'havien considerat diferents, fet que va provocar una explosió de nous avenços en aquestes disciplines (molts d'ells del mateix Sullivan) al llarg de finals del segle XX. La teoria de funcions quasiconformes havia penetrat amb força a la dinàmica complexa —la tècnica que es coneix com a *cirurgia quasiconforme* [10] és avui part de la formació bàsica de qualsevol estudiant de doctorat a l'àrea.

Dennis Sullivan va rebre el premi Abel 2022 i vam pensar que seria una bona ocasió per escriure el present article.

La resta de l'article està dividida en tres seccions més. A la segona secció, introduím els grups kleinians i les nocions necessàries per enunciar el teorema de finitud d'Ahlfors; a la tercera secció, fem el mateix amb la dinàmica holomorfa i el teorema de no existència de dominis errants. Finalment, a la secció 4 presentem un esbós de les dues demostracions, que són dues aplicacions d'una mateixa idea, fent servir eines que serveixen tant per a dinàmica holomorfa com per a grups kleinians. Ho aprofitem per acabar amb el diccionari de Sullivan, que estableix analogies entre els dos camps.

2 Grups kleinians i el teorema de finitud d'Ahlfors

2.1 Grups kleinians

En aquesta secció fem una breu introducció als grups kleinians, és a dir, grups discrets de transformacions de Möbius o homografies de l'esfera de Riemann (o la recta projectiva complexa) $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$. Aquestes homografies són transformacions racionals de grau 1, és a dir, aplicacions de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Mitjançant els coeficients a, b, c i d, el grup d'homografies s'identifica de manera natural al grup de matrius $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, és a dir, el grup de matrius 2×2 a coeficients complexos i determinant 1, llevat de signe (vegeu, per exemple, [6]).

Exemple. Considerem el grup modular $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, que és discret i, per tant, un grup kleinià. És a dir, el grup de transformacions conformes $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, amb $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $ad - bc = 1$. Aquest grup actua de manera pròpiament discontínua en el semiplà superior $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. A la figura 3 en representem un domini fonamental. Des del punt de vista dels grups kleinians, ens mirem Γ com un grup de transformacions de tota l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. El grup Γ actua de manera pròpiament discontínua als semiplans superior i inferior $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$ i les òrbites s'acumulen al cercle real $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

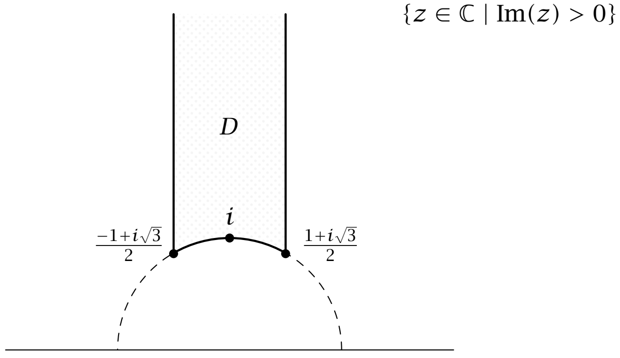

Figura 3: El domini $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$ és un domini fonamental per al grup modular $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$: cada òrbita de Γ en el semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ talla un sol punt de l'interior de D, o bé en un o dos punts de la vora de D.

Recordem de la introducció que el conjunt de punts d'acumulació d'una òrbita $\Gamma x \subset \hat{\mathbb{C}}$ s'anomena *conjunt límit* i es denota amb $\Lambda(\Gamma)$. En el cas que Γ sigui finit, seguim la convenció que $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$. Recordem també que el *domini de discontinuïtat* d'un grup kleinià és el complement del conjunt límit $\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$. Tenim una partició dinàmica $\hat{\mathbb{C}} = \Omega(\Gamma) \cup \Lambda(\Gamma)$, perquè l'acció de Γ a $\Omega(\Gamma)$ és pròpiament discontínua i el tancat $\Lambda(\Gamma)$ és el subconjunt de punts d'acumulació de qualsevol òrbita $\Gamma x = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$.

En l'exemple del grup modular $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, tenim que $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$ és un cercle i que $\Omega(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$ consisteix en dos discs, tal com es pot veure a la figura 4.

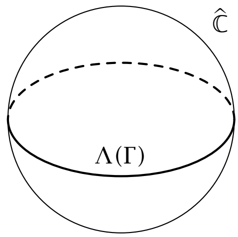

FIGURA 4: El conjunt límit del grup modular $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ és $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$, que representem com l'equador a la figura.

LEMA 1. *La cardinalitat del conjunt límit* $|\Lambda(\Gamma)|$ *és* 0, 1, 2 *o* ∞.

DEFINICIÓ 2. Un grup kleinià Γ es diu que és *elemental* quan $|\Lambda(\Gamma)| \leq 2$ i *no elemental* quan $|\Lambda(\Gamma)| > 2$, és a dir, quan $|\Lambda(\Gamma)| = \infty$.

Els grups elementals tenen una dinàmica molt senzilla: si $|\Lambda(\Gamma)| = 2$, la dinàmica és d'atractor/repulsor, i si $|\Lambda(\Gamma)| = 1$, la dinàmica és parabòlica. A més, algebraicament els grups elementals són o bé finits (aleshores, $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$), o bé una extensió finita de $\mathbb{Z}$ (aleshores, $|\Lambda(\Gamma)| = 1$ o 2) o de $\mathbb{Z}^2$ (aleshores, $|\Lambda(\Gamma)| = 2$). La teoria de grups kleinians se centra en els grups no elementals i d'ara endavant suposarem que tots els grups kleinians són *no elementals*.

PROPOSICIÓ 3. *Si* Γ *és un grup kleinià, aleshores* $\Lambda(\Gamma)$ *és compacte, perfecte i minimal.*

Quan es diu que $\Lambda(\Gamma)$ és perfecte, vol dir que no té punts aïllats, i que sigui minimal vol dir que qualsevol òrbita s'acumula en tot $\Lambda(\Gamma)$.

EXEMPLE. Un *grup fuchsià* és un grup discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, és a dir, un grup d'isometries del pla hiperbòlic en el model del semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. El nom també és degut a Poincaré [29], en honor dels treballs de Lazarus Fuchs.

De la mateixa manera que per al grup modular, mitjançant la inclusió $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, un grup fuchsià es pot veure com un grup kleinià, i el conjunt límit $\Lambda(\Gamma)$ és un subconjunt del cercle $\hat{\mathbb{R}}$. Això inclou els grups de superfície de gènere $g > 1$; en aquest cas el conjunt límit és $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$, com a la figura 4.

Exemple. Els *grups de Schottky* prenen el nom dels primers exemples de Friedrich Schottky [31]. Considerem quatre discs disjunts $A, B, C, D \subset \mathbb{C}$, com a la figura 5. Siguin $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ automorfismes conformes tals que:

$$\gamma_1(\hat{\mathbb{C}} - B) = A \quad \text{i} \quad \gamma_2(\hat{\mathbb{C}} - C) = D.$$

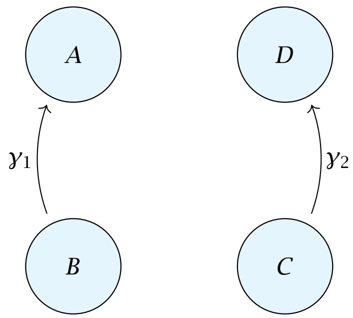

Figura 5: Grup de Schottky, generat per $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, que compleixen $\gamma_1(\hat{\mathbb{C}} - B) = A$ i $\gamma_2(\hat{\mathbb{C}} - C) = D$.

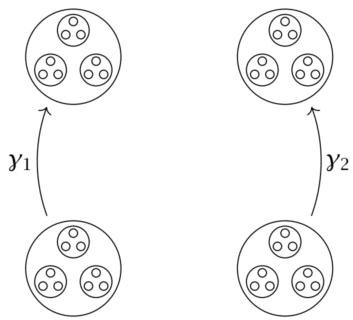

Figura 6: Òrbites dels cercles, que s'acumulen en un conjunt de Cantor $\Lambda(\Gamma)$. En particular, $\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$ és una superfície planar connexa d'àrea infinita.

És a dir, γ_1 defineix un homeomorfisme entre l'exterior de B i l'interior de A, i γ_2 ho fa entre l'exterior de C i l'interior de D. En particular, $\gamma_1(A) \subset A$ i $\gamma_2(C) \subset C$.

Per construcció, $\gamma_1(A)$, $\gamma_1(C)$ i $\gamma_1(D)$ són cercles disjunts a l'interior de A, i tenim afirmacions similars per a γ_1^{-1} i γ_2^{-1}. Si iterem aquest procés, obtenim inclusions successives amb les quals demostrem que γ_1 i γ_2 generen un grup lliure que és discret. A més, el conjunt límit $\Lambda(\Gamma)$ en aquest cas és un conjunt de Cantor, que és el límit de les iteracions de cercles, representat a la figura 6. El domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$ és connex, però té topologia infinita. La superfície $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ és una superfície compacta de gènere 2.

Per al proper exemple necessitem una definició que s'utilitza tant en grups kleinians com en dinàmica holomorfa, i que farem servir en seccions posteriors. La noció de quasiconformitat és una relaxació de la conformitat. Si una aplicació conforme porta cercles a cercles (a nivell infinitessimal), una aplicació quasiconforme porta cercles a corbes que potser no són cercles, però que estan contingudes entre dos cercles de radi controlat.

DEFINICIÓ 4 (HOMEOMORFISME QUASICONFORME). Un homeomorfisme $\phi\colon U \to V$ entre dos oberts de $\mathbb{C}$ s'anomena *K-quasiconforme* si, per a tot $x \in U$, es compleix

$$H_\phi(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\sup\{|\phi(z)-\phi(x)| \mid |z-x| = r\}}{\inf\{|\phi(z)-\phi(x)| \mid |z-x| = r\}} \le K.$$

Diem que ϕ és *quasiconforme* quan és K-quasiconforme per a algun $K \ge 1$. Ser 1-quasiconforme equival a ser holomorfa o antiholomorfa.

Geomètricament, si una aplicació conforme preserva angles, una de quasiconforme pot distorsionar-los, però de manera controlada.

EXEMPLE. Un grup *quasifuchsià* és un grup kleinià pel qual existeix un homeomorfisme quasiconforme $\phi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\phi\Gamma\phi^{-1}$ és fuchsià, on el conjugat $\phi\Gamma\phi^{-1}$ denota el grup format per elements de la forma $\phi\gamma\phi^{-1}$ amb $\gamma \in \Gamma$. Es pot demostrar (per exemple a [17, teorema 8.17]) que un grup és quasifuchsià si i només si el seu conjunt límit és la imatge d'una circumferència per un homeomorfisme quasiconforme, com a la figura 7.

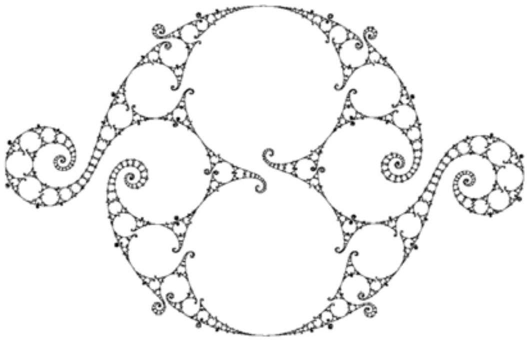

FIGURA 7: Conjunt límit d'un grup quasifuchsià representat al pla $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$. El domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$ té dos components homeomorfs a discs. (Font: Dave Dumas.)

EXEMPLE. Les deformacions de l'exemple anterior s'anomenen *quasiconformes*. Es poden construir deformacions d'un grup kleinià Γ que no són necessàriament quasiconformes. Considerem representacions de Γ en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ fidels i discretes (és a dir, morfismes de grup $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ injectius amb imatge discreta). D'aquesta manera, es poden deformar grups que deixin de ser quasifuchsians i obtenir conjunts límit que ja no són corbes simples. En particular, pot haver-hi grups «amb cusps», com a la figura 8, o grups que s'anomenen *degenerats*, com a la figura 9, també pot ser una manera de construir corbes de Peano de $\hat{\mathbb{C}}$, és a dir, aplicacions contínues del cercle S^1 a $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$ que són equivariants per l'acció d'un grup de Möbius. Aquestes corbes de Peano s'anomenen *aplicacions de Cannon-Thurston* [23] i s'obtenen com a aplicació del conjunt límit d'un grup fuchsià, que és S^1, al conjunt límit del grup kleinià, que pot ser tot $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$.

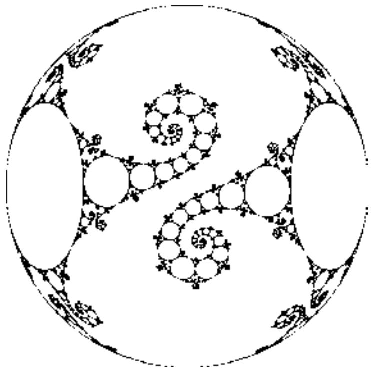

FIGURA 8: Conjunt límit d'un grup que no és quasifuchsià, representat a l'esfera $\hat{\mathbb{C}}$. El domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$ té infinits components, que són discs. (Font: Curt McMullen.)

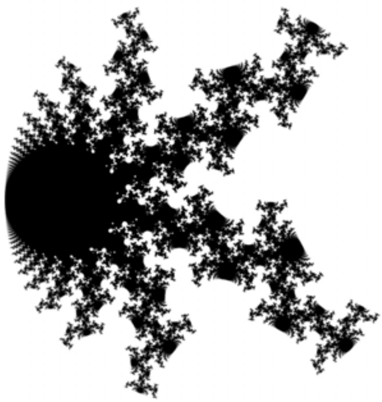

FIGURA 9: Conjunt límit d'un grup kleinià degenerat. En aquest cas el domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$ és connex. (Font: Jeff Brock.)

Els grups kleinians estan relacionats amb les varietats hiperbòliques de dimensió tres, perquè l'esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ és la *frontera ideal* de l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}^3$. A més, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ és el grup d'isometries de l'espai hiperbòlic que preserven l'orientació: tota isometria de $\mathbb{H}^3$ s'estén de manera natural a una única transformació de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$. Mitjançant aquesta relació, l'estudi dels grups kleinians va renovar el seu interès a la dècada del 1980, a partir dels treballs de Thurston en varietats hiperbòliques tridimensionals [35]. Sens dubte, l'embranzida que li va donar Sullivan va ser-ne una altra de les causes.

2.2 El teorema de finitud d'Ahlfors

Per simplificar l'exposició, considerem grups kleinians $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ que no tenen elements d'ordre finit, és a dir, elements $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ no trivials que compleixen que γ^n és trivial per a un cert $n \in \mathbb{N}$. Tots els enunciats es poden formular sense dificultat en el cas que Γ tingui elements d'ordre finit, però l'exposició és una mica més llarga. A més, pel lema de Selberg tot grup kleinià $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ té un subgrup $\Gamma_0 < \Gamma$ d'índex finit sense elements d'ordre finit, i molts arguments es redueixen a aquest cas [17].

Sigui $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ un grup kleinià amb domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$. Com que $\Omega(\Gamma)$ és un obert de l'esfera de Riemann, possiblement amb infinits components o amb topologia infinita, $\Omega(\Gamma)$ és una superfície conforme (és a dir, una superfície amb un atles conforme o holomorf). A més, l'acció de Γ a $\Omega(\Gamma)$ és conforme i pròpiament discontínua i, com que suposem que no hi ha elements d'ordre finit, l'acció de Γ a $\Omega(\Gamma)$ no té punts fixos. En conseqüència, el quocient $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ és una superfície de Riemann.

Teorema 5 (Finitud d'Ahlfors, 1964 [1]). *Sigui Γ un grup kleinià amb un nombre finit de generadors. Aleshores la superfície $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ és hiperbòlica de tipus conforme finit.*

Una de les conseqüències del teorema és que $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ té un nombre finit de components, la qual cosa es pot veure com un resultat anàleg al teorema de Sullivan sobre la no existència de dominis errants.

Una superfície de Riemann pot ser el·líptica (si és l'esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$), parabòlica (si és $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, o $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$) o hiperbòlica (tota la resta).

Definició 6 (Tipus conforme finit i hiperbolicitat). Una superfície de Riemann és de *tipus conforme finit* si és conformement equivalent a una superfície de Riemann compacta, possiblement menys un nombre finit de punts.

Si una superfície de Riemann és *hiperbòlica*, aleshores és el quocient d'un disc per un grup discret de transformacions conformes, i la mètrica de Poincaré del disc indueix una mètrica hiperbòlica de la superfície de Riemann. Ser de tipus finit és equivalent a tenir àrea hiperbòlica finita.

Donat un component connex Ω_0 del domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$, denotem amb Γ_0 el seu estabilitzador a Γ, $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Omega_0 = \Omega_0\}$. La part més interessant de la demostració del teorema de finitud d'Ahlfors és la proposició següent.

Proposició 7. *Per cada component connex Ω_0 de $\Omega(\Gamma)$, el conjunt límit del seu estabilitzador Γ_0 és tota la frontera de Ω_0, $\Lambda(\Gamma_0) = \partial\Omega_0$.*

Com que Γ_0 estabilitza Ω_0, el conjunt límit $\Lambda(\Gamma_0)$ és un subconjunt de $\partial\Omega_0$, $\Lambda(\Gamma_0) \subseteq \partial\Omega_0$, i la teoria clàssica de superfícies hiperbòliques ens diu que tenim igualtat, $\Lambda(\Gamma_0) = \partial\Omega_0$, si i només si Ω_0/Γ_0 és una superfície de Riemann de tipus finit. Aquesta proposició es podria veure com una conseqüència del teorema de finitud d'Ahlfors, però en realitat és una etapa molt important de la demostració. Ens fixem en aquesta proposició i en el fet que Ω/Γ té un nombre finit de components, perquè és on Sullivan va fer una nova demostració en l'article de dinàmica holomorfa, com explicarem més endavant.

3 Dinàmica holomorfa i el teorema de Sullivan

3.1 Transformacions racionals: dinàmica holomorfa

Donada una funció racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, on P i Q són polinomis sense termes en comú, hom pot considerar el sistema dinàmic generat per la iteració de f, és a dir, les *òrbites* $(z_n := f^n(z_0))_n$ de les diferents condicions inicials $z_0 \in \mathbb{C}$. Processos iteratius d'aquesta mena apareixen de manera natural en modelar fenòmens que evolucionen en temps discrets, o en algorismes numèrics de, per exemple, càlcul aproximat d'arrels de polinomis, com podria ser el conegut mètode de Newton.

La funció racional f, i, per tant, el sistema dinàmic, s'estén de manera natural a l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$, equipada amb la mètrica esfèrica, estenent f per continuïtat als zeros de Q (pols de f) i a l'infinit. Les òrbites de f poden comportar-se de maneres diferents. Així doncs, entre elles trobem els *equilibris del sistema*, és a dir, les *òrbites periòdiques de període p*, quan $z_n = z_{n+p}$ per a alguna $p \geq 1$ i per a tota $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; o les que tendeixen a una òrbita periòdica; o, ben diferentment, les que es comporten de manera aparentment erràtica o caòtica, com per exemple omplint de manera densa alguna part de l'esfera.

L'objectiu dels sistemes dinàmics en general, i de la dinàmica holomorfa en particular, és estudiar i classificar el comportament asimptòtic de les òrbites en termes de la condició inicial. Donat que les transformacions de Möbius tenen una dinàmica força simple, considerarem sempre que el *grau* de la funció racional, $d := \max\{\mathrm{grau}(P), \mathrm{grau}(Q)\}$, és més gran o igual que 2, on d coincideix amb el nombre d'antiimatges de qualsevol punt de $\widehat{\mathbb{C}}$, comptades amb multiplicitat.

Tal com hem esbossat a la introducció, l'esfera es divideix en dos conjunts totalment invariants (és a dir, formats per òrbites que no es barregen entre elles), que es defineixen com segueix.

Definició 8. El *conjunt de Fatou* d'una funció racional f és el conjunt obert més gran de $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que la família d'iterats $\{f^n\}_n$ és una família normal o equicontínua (en la mètrica esfèrica), és a dir,

$$F(f) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_n \text{ és normal en algun entorn de } z_0\}.$$

El seu complementari, el *conjunt de Julia* de f, es defineix, per tant, com

$$J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_n \text{ no és normal en cap entorn de } z_0\}.$$

Veurem a la secció 4.4 que, en el diccionari de Sullivan, el conjunt de Fatou és l'anàleg del conjunt de discontinuïtat d'un grup kleinià, mentre que el conjunt de Julia correspon al conjunt límit.

El concepte de família normal en un obert U fou desenvolupat per Montel [24] també a començaments del segle XX, i identifica aquestes famílies de funcions com aquelles per a les quals qualsevol parcial en té una que convergeix uniformement en compactes de U. Les òrbites de $F(f)$ són, doncs, les òrbites *estables*, en el sentit que es comporten de manera similar a les seves òrbites veïnes. Contràriament, les òrbites de $J(f)$ tenen un comportament inestable o *caòtic*. Un cas particular de les primeres serien aquelles que pertanyen a una *conca d'atracció*, és a dir, als oberts que envolten les òrbites periòdiques *atractores*, que, com el seu nom indica, atrauen totes les òrbites del seu voltant.

Exemple (La funció z^2). El disc unitat (obert) $\mathbb{D}$ per a la funció $f(z) = z^2$, que consisteix en òrbites que convergeixen en $z = 0$ sota iteració, és un exemple d'una conca d'atracció. O bé, en aquest mateix exemple, també ho és el complementari del disc tancat $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, format per òrbites que convergeixen uniformement en el punt de l'infinit. Aquests dos conjunts formen el conjunt de Fatou (o conjunt estable) de la funció $f(z) = z^2$. El seu complementari, el cercle unitat, és, doncs, el conjunt de Julia, i és senzill comprovar que és *totalment invariant* (és a dir, $f(\mathbb{S}^1) = f^{-1}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$), i que les seves òrbites es comporten d'una manera radicalment diferent a les descrites anteriorment. Mencionarem, per exemple, que $\mathbb{S}^1$ conté un conjunt dens d'òrbites periòdiques de períodes arbitràriament alts, en aquest cas repulsores, és a dir, que repel·leixen les òrbites properes; però també que qualsevol entorn d'un punt de $\mathbb{S}^1$ cobreix, sota iteracions successives, tots els punts de l'esfera excepte el zero i l'infinit.

Aquesta última propietat s'anomena *propietat de superexpansió* (*blow-up* en anglès), i juntament amb la densitat dels punts periòdics i moltes altres característiques interessants (associades al concepte de *caos*) no són particulars de $z \mapsto z^2$, sinó que són certes per al conjunt de Julia de qualsevol funció racional (i, de fet, de més generals i tot).

En analogia amb les propietats del conjunt límit d'un grup kleinià, mencionarem, per exemple, que el conjunt de Julia $J(f)$ és un conjunt perfecte (és a dir, sense punts aïllats) de cardinal infinit; o que les successives antiimatges de qualsevol punt de l'esfera s'acumulen sempre en tot el conjunt de Julia, fet que escriuríem formalment com

$$J(f) \subseteq \overline{\{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^n(w) = z, \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}},$$

per a qualsevol $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ (excepte com a màxim dos punts), i on es dona la igualtat si $z \in J(f)$.

De conjunts de Julia n'hi ha una immensa varietat, amb propietats analítiques, geomètriques i topològiques ben diferents: hi ha conjunts de Julia connexos, disconnexos i conjunts de Cantor; continus indescomponibles; de mesura zero o de mesura positiva; localment connexos o no localment connexos; amb qualsevol dimensió de Hausdorff predeterminada entre 1 i 2, etc. La relació entre aquestes propietats i certes característiques dinàmiques de la funció f, a vegades només relatives a uns pocs punts, han interessat els matemàtics des del 1900 fins avui dia, i han connectat la dinàmica complexa amb diferents àmbits de les matemàtiques, com la topologia, l'anàlisi, la teoria geomètrica de funcions o la teoria de nombres.

La propietat de superexpansió juntament amb la invariància del conjunt de Julia i el fet que les funcions holomorfes són funcions localment conformes excepte al voltant d'un nombre finit de punts fan que els conjunts de Julia exhibeixin una estructura fractal o autosemblant, que dona lloc a imatges tan interessants com les de la figura 10. Tot i que Fatou i Julia ja van intuir aquesta complexitat, no va ser fins a l'aparició dels ordinadors gràfics, al voltant del 1980, que aquests conjunts van poder ser visualitzats. Aquest fet va provocar un renaixement de la teoria, que va atraure matemàtics de moltes àrees diferents, entre ells John Milnor, Jean-Christophe Yoccoz i el mateix Dennis Sullivan. Expliquen els protagonistes de l'època que va ser durant la tardor del 1981, en un seminari a l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), quan Sullivan va exposar la connexió entre les deformacions quasiconformes de superfícies de Riemann, la teoria de grups kleinians i la dinàmica complexa, amb la qual cosa obria la porta a multitud d'aplicacions posteriors.

Per a un tractament rigorós de la dinàmica de funcions racionals podem consultar, per exemple, [7, 11, 22].

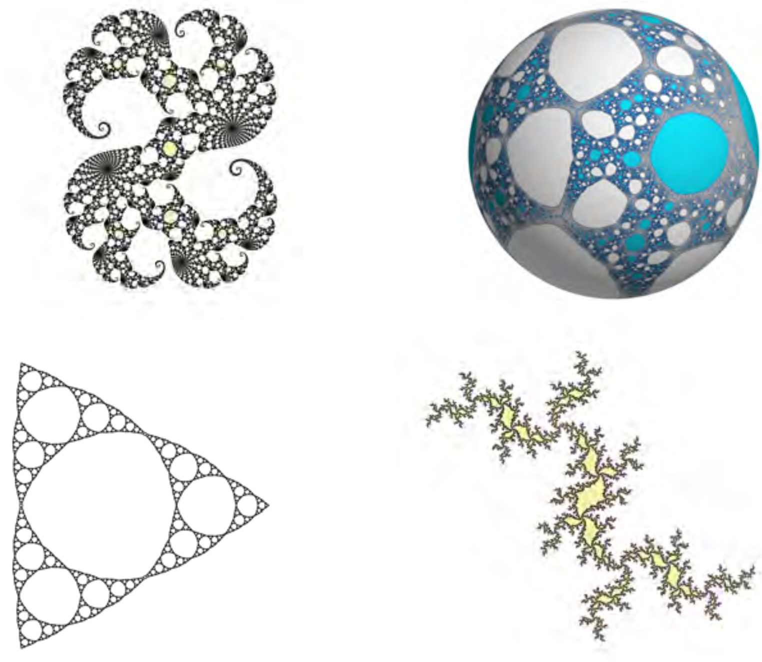

FIGURA 10: A dalt, a l'esquerra, conjunt de Julia (en negre) d'un polinomi de grau 2 amb una òrbita periòdica de període molt gran; a la dreta, funció racional dibuixada a l'esfera de Riemann (conques d'atracció en colors clars). A baix, a l'esquerra, conjunt de Julia (en negre) d'una funció racional; a la dreta, conjunt de Julia (en negre) d'un polinomi de grau 2 amb una òrbita periòdica atractora de període 9. La figura superior dreta és cortesia d'Arnaud Cheritat.

3.2 Els components de Fatou i el teorema de Sullivan

Partint de la definició, veiem que el conjunt de Fatou és un obert. Per a la funció $f(z) = z^2$ (i, de fet, z^d per a qualsevol d amb $|d| \geq 2$), hem vist que $F(f)$ té exactament dos components connexos. Però aquests són casos ben especials (són els *productes de Blaschke*, anàlegs dels grups fuchsians), ja que, per a qualsevol altra funció racional, el conjunt de components de $F(f)$ és infinit (numerable), cada un dels quals anomenat *component estable o de Fatou* de la funció f. En analogia al conjunt de discontinuïtat de grups kleinians, se sap que el nombre de components de Fatou és sempre 0, 1, 2 o ∞.

La total invariància del conjunt de Julia (al qual pertany la frontera de qualsevol component de Fatou) fa que si U és un component de Fatou, $f(U)$ també ho sigui, essent $f\colon U \to f(U)$ una funció pròpia (és a dir, una funció amb grau finit ben definit i més gran o igual a 1, i que envia la frontera de U a la frontera de $f(U)$). S'estableix així un sistema dinàmic entre els components estables, els quals es poden classificar en primera instància de la manera següent.

Definició 9. Sigui U un component connex de $F(f)$. Diem que U és

(a) *periòdic*, si $f^p(U) = U$ per a algun $p \geq 1$ (anomenat *invariant* o *fix* si $p = 1$);

(b) *preperiòdic*, si $f^k(U)$ és periòdic per a algun $k > 1$, però U no ho és; i

(c) *errant*, si $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$ per a tot $n \neq m$.

Els components periòdics van ser classificats amb més detall, en termes del comportament asimptòtic dels iterats $f^n_{|U}$, essent aquest el contingut del teorema de classificació de Fatou [13] (vegeu la figura 11).

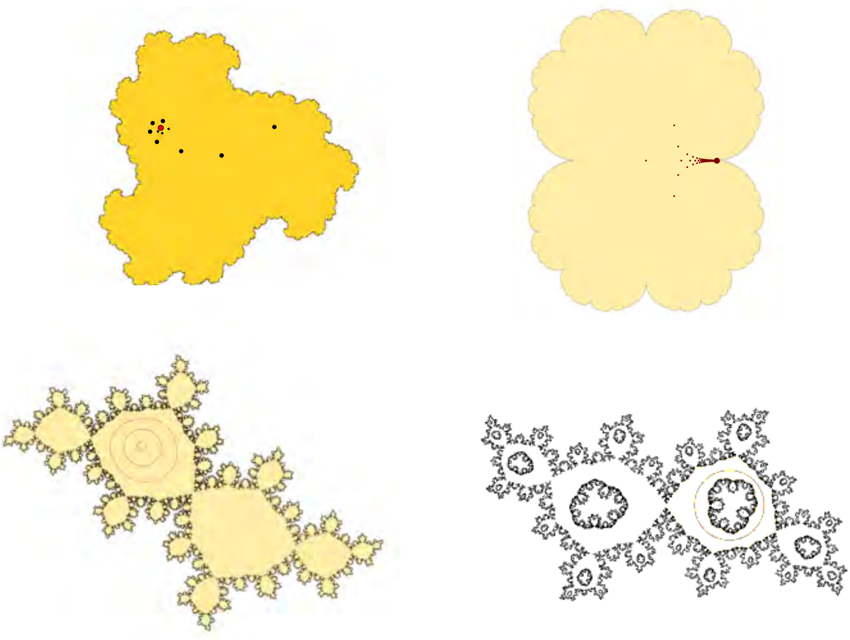

Figura 11: Els diferents tipus de components de Fatou: conca d'atracció, conca parabòlica, disc de Siegel i anell de Herman (component en groc). El gràfic mostra també algunes òrbites dins dels components invariants.

TEOREMA 10 (CLASSIFICACIÓ DE COMPONENTS DE FATOU). *Sigui U un component estable de f de període p. Aleshores,*

(a) *U és part d'una* conca d'atracció d'una òrbita periòdica atractora, *és a dir, $f^{pn}_{|U} \to z_0 \in U$, amb $|(f^p)'(z_0)| < 1$; o bé*

(b) *U és part d'una* conca d'atracció d'una òrbita periòdica parabòlica, *és a dir, $f^{pn}_{|U} \to z_0 \in \partial U$, amb $|(f^p)'(z_0)| = 1$; o bé*

(c) *U és un* domini de rotació, *és a dir, els iterats f^{pn} són conformement conjugats a una rotació rígida $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}$, amb $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En aquest cas U només pot ser simplement connex (*disc de Siegel*) o doblement connex (*anell de Herman*).*

Fatou i Julia es basaren en la teoria de Montel per establir aquest teorema de classificació, mitjançant un estudi exhaustiu de les possibles funcions límit de famílies normals d'iterats. Malgrat aquest avenç, no van saber determinar si totes elles en realitat existien. No va ser fins al 1942 [32] que Siegel va demostrar l'existència de discs de rotació i fins al 1979 [15] que Herman va fer el mateix amb els anells que avui porten el seu nom. Aquest és un dels punts en què la dinàmica connecta amb l'aritmètica, en la cerca de les condicions sobre el número de rotació $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que asseguren la presència d'aquests objectes. Val a dir que les condicions òptimes són encara avui un problema no resolt que ha estat central al treball de matemàtics com Jean-Christophe Yoccoz [37, 36] o Ricardo Pérez-Marco [27, 28], entre d'altres.

Un cop establerta la classificació dels components (pre)periòdics, va romandre obert durant uns seixanta anys més el problema de la possible existència de dominis errants per a funcions racionals, amb resposta incerta des que Noel Baker el 1976 va trobar la primera funció holomorfa (no racional) amb un domini errant [5]. Com ja hem mencionat anteriorment, va ser al voltant dels anys vuitanta que Dennis Sullivan va adonar-se que les deformacions quasiconformes, ja presents a la teoria de grups kleinians, podien ser utilitzades per provar el resultat que tancaria la conjectura de Fatou i que avui es coneix com a teorema de no existència de dominis errants (*no wandering domains theorem* en anglès) o simplement com a *teorema de Sullivan*.

TEOREMA 11 (NO EXISTÈNCIA DE DOMINIS ERRANTS, 1985 [33]). *Sigui f una funció racional i U un component de $F(f)$. Aleshores U és periòdica o preperiòdica, és a dir, existeixen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \neq m$, tals que $f^n(U) = f^m(U)$.*

Amb els mateixos arguments, Sullivan redemostrava també el teorema de finitud d'Ahlfors, i obria la connexió entre la teoria de grups kleinians i la dinàmica holomorfa.

4 Deformacions quasiconformes i la demostració de Sullivan

4.1 Funcions quasiconformes i coeficients de Beltrami

Com hem vist a la definició 4, la quasiconformitat representa una versió més feble de la conformitat; tal com s'ha comentat, les funcions conformes conserven els angles, mentre que les funcions quasiconformes els poden distorsionar, tot i que de manera limitada. Són homeomorfismes no necessàriament diferenciables, tot i que ho són en gairebé tot punt. Malgrat aquesta limitació, molts teoremes sobre funcions conformes, quan són expressats adequadament, mantenen la validesa per a funcions quasiconformes.

El coeficient de Beltrami és una eina clau per a l'estudi d'homeomorfismes quasiconformes.

Definició 12 (Coeficient de Beltrami). Sigui $\mu\colon U \to \mathbb{C}$ una funció mesurable. Diem que μ és un *k-coeficient de Beltrami* en U si

$$||\mu(z)||_\infty \leq k < 1 \quad \text{gairebé per a tot } z \in U.$$

Diem que μ és un coeficient de Beltrami si μ és un k-coeficient de Beltrami per a algun $k < 1$. Dos coeficients de Beltrami en U són equivalents si coincideixen en gairebé tot punt de U.

Proposició 13 (Quasiconformitat i coeficient de Beltrami). *Un homeomorfisme $\phi\colon U \to V$ entre dos oberts de $\mathbb{C}$ que preserva l'orientació és K-quasiconforme si i només si ϕ té derivades generalitzades (en el sentit de les distribucions) a L^2_{loc} i*

$$\mu_\phi(u) := \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(u)}{\partial_z\phi(u)}$$

és un k-coeficient de Beltrami amb $k = \frac{1-K}{1+K}$.

Si $\phi\colon U \to \mathbb{C}$ és una funció que té derivades L^2_{loc} i $\partial_{\bar{z}}\phi(u)/\partial_z\phi(u)$ és un k-coeficient de Beltrami (però potser ϕ no és un homeomorfisme amb la imatge), diem que ϕ és una funció *K-quasiregular.*

D'alguna manera, $\mu_\phi(u)$ mesura com de lluny es troba ϕ de ser una funció conforme en el punt u i, per tant, de preservar angles —observem que les equacions de Cauchy Riemann $\partial_{\bar{z}}\phi(u) = 0$ correspondrien a $\mu(u) = 0$.

Vegem a continuació com els coeficients de Beltrami poden ser transportats mitjançant les funcions quasiregulars. Aquesta operació s'anomena *transport enrere* (*pullback* en anglès).

Definició 14 (Transport enrere i invariància). Donat un coeficient de Beltrami μ en V i una funció quasiregular $f\colon U \to V$, definim el transport enrere de μ per f com el coeficient de Beltrami definit a U per

$$f^*\mu(u) = \frac{\partial_{\bar{z}}f(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_z f(u)}}{\partial_z f(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_{\bar{z}} f(u)}}.$$

Diem que μ és *f-invariant* si $f^*\mu = \mu$, entès com que $\mu(u) = f^*\mu(f(u))$ gairebé per a tot $u \in U$.

Observem que, en el llenguatge dels *pullbacks*, el coeficient de Beltrami μ_ϕ definit per la funció ϕ s'escriu com

$$\mu_\phi = \phi^* \mu_0,$$

on $\mu_0 \equiv 0$ és el que s'anomena *estructura complexa estàndard*. Es dedueix del lema de Weyl [2, 19] que una funció f quasiregular és holomorfa si i només si $f^*\mu_0 = \mu_0$.

Definició 15 (Equació de Beltrami i integració). Donat un coeficient de Beltrami μ, l'equació en derivades parcials

$$\partial_{\bar{z}} \phi = \mu(z) \partial_z \phi$$

es coneix com a *equació de Beltrami*. *Integrar* μ vol dir trobar una funció quasiconforme ϕ que resolgui l'equació de Beltrami o, equivalentment, trobar ϕ tal que $\mu_\phi = \mu = \phi^*\mu_0$, en què recordem que totes aquestes igualtats han de complir-se gairebé per a tot punt.

Els coeficients de Beltrami tenen una interpretació geomètrica: pensem que $\mu(z)$ codifica la informació d'una el·lipse infinitesimal tangent a z (mòdul reescalament), de manera que μ és un camp mesurable d'el·lipses tangents a un obert U, definit gairebé pertot, i les excentricitats són uniformement acotades. Una aplicació quasiconforme $f: U \to V$ és derivable gairebé pertot i la seva diferencial pot utilitzar-se per fer el transport enrere de cada una de les el·lipses infinitesimals tangents a un punt de V, i obtenir un nou camp d'el·lipses tangents a U. L'estructura complexa estàndard $\mu_0 \equiv 0$ correspon a un camp de cercles i tota aplicació holomorfa *preserva* μ_0, és a dir, porta cercles infinitesimals a cercles infinitesimals. Es pot veure, doncs, que un coeficient de Beltrami indueix una estructura complexa a l'obert U (o en una superfície de Riemann, si es defineixen apropiadament). No entrarem en detall en aquesta direcció i remetem el lector a [10].

El famós teorema d'integrabilitat o *measurable Riemann mapping theorem* (MRMT) demostrat per Morrey, Bojarski, Ahlfors i Bers [26, 9, 3] ens diu que tots els k-coeficients de Beltrami són integrables.

Teorema 16 (Teorema d'integrabilitat o MRMT). *Sigui μ un k-coeficient de Beltrami en U, per a algun $k < 1$, on $U = \mathbb{C}$ (resp. $U = \widehat{\mathbb{C}}$ o $U \simeq \mathbb{D}$). Aleshores existeix una funció quasiconforme $\phi: U \to \mathbb{C}$ (resp. $\phi: U \to \widehat{\mathbb{C}}$ o $\phi: U \to \mathbb{D}$) tal que $\mu_\phi = \mu$ gairebé pertot. A més, qualsevol altra ψ que compleixi $\mu_\psi = \mu$ és de la forma $\psi = f \circ \phi$, on f és un isomorfisme conforme de $\mathbb{C}$ (resp. de $\widehat{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{D}$).*

Fem notar el perquè del nom d'aquest teorema observant que si $\mu = \mu_0 \equiv 0$, i U és conformement equivalent al disc (és a dir, $U \subsetneq \mathbb{C}$ simplement connex), aleshores la funció quasiconforme $\phi: U \to \mathbb{D}$ que ens dona el teorema compleix que $\phi^*\mu_0 = \mu_0$ i, per tant, és conforme pel lema de Weyl. En altres paraules, ϕ és exactament la funció de Riemann que envia U al disc unitat. Val a dir, per acabar, que la definició dels coeficients de Beltrami a l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ (o en una superfície de Riemann general) requereix l'ús de cartes i de la notació adequada (vegeu, per exemple, [12, capítol 13] o [10, secció 1.3.7]).

4.2 L'espai de deformacions quasiconformes

En aquesta secció construïm espais de deformacions quasiconformes tant per a funcions racionals com per a grups kleinians.

Donada una funció racional f, diem que g és una *deformació quasiconforme* de f si g és també una funció racional *conjugada* a f mitjançant una aplicació quasiconforme, és a dir, si existeix una funció quasiconforme $\phi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Al conjunt de deformacions de f, introduïm una relació d'equivalència definint que $g_1 \sim g_2$ si $g_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ i $g_2 = \phi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1}$ són conjugades per una aplicació conforme, és a dir, si $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ és conforme.

Anàlogament, donat un grup kleinià Γ finitament generat, diem que Γ' és una deformació quasiconforme de Γ si també és un grup kleinià i tot element $\gamma' \in \Gamma'$ és conjugat a algun element $\gamma \in \Gamma$ mitjançant un homeomorfisme quasiconforme, que no depèn de γ'. Equivalentment, existeix un homeomorfisme quasiconforme $\phi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que, per a tot $\gamma' \in \Gamma'$,

$$\gamma' = \phi \circ \gamma \circ \phi^{-1} \tag{1}$$

per a algun $\gamma \in \Gamma$. Observem que n'hi ha prou que aquesta condició es compleixi per als generadors del grup i que Γ' ha de tenir el mateix nombre de generadors que Γ. De la mateixa manera que en el cas racional, dues deformacions Γ' i Γ'' són equivalents si aquestes són conformement conjugades, o si ho són les aplicacions quasiconformes que les defineixen.

Les demostracions dels dos teoremes que ens ocupen (el teorema de finitud d'Ahlfors i el de no existència de dominis errants de Sullivan) es basen en l'anàlisi de l'espai de deformacions quasiconformes $\mathrm{Def}(f)$ d'una funció racional f, o d'un grup kleinià Γ, $\mathrm{Def}(\Gamma)$, mòdul la relació d'equivalència que hem descrit.

Per entendre millor les propietats d'aquests espais, és convenient adonar-se que el teorema d'integrabilitat ens permet reformular-ne la definició. En efecte, suposem que tenim un coeficient de Beltrami μ a $\widehat{\mathbb{C}}$ que és f-invariant, és a dir, que $f^*\mu = \mu$. Aplicant el teorema d'integrabilitat, obtenim una funció quasiconforme ϕ tal que $\mu = \mu_\phi$, o, equivalentment, tal que $\phi^*\mu_0 = \mu$. Si ara definim la funció $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, veiem que g és quasiconforme i que

$$g^*\mu_0 = (\phi^{-1})^*(f^*(\phi^*\mu_0)) = (\phi^{-1})^*(f^*\mu) = (\phi^{-1})^*\mu = \mu_0,$$

de la qual cosa deduïm, pel lema de Weyl, que g és holomorfa, i, per tant, racional. Això ens diu que existeix una bijecció entre $\mathrm{Def}(f)$ i els k-coeficients de Beltrami f-invariants, amb $k < 1$, és a dir,

$$\mathcal{B}_1(f) = \{\text{coeficients de Beltrami } \mu \in L^\infty\ f\text{-invariants amb } ||\mu||_\infty < 1\}.$$

Això ens permet dotar l'espai $\mathrm{Def}(f)$ d'una estructura de varietat complexa, ja que $\mathcal{B}_1(f)$ és la bola unitat de l'espai de Banach de k-coeficients de Beltrami f-invariants, equipat amb la norma infinit.

En el cas d'un grup kleinià Γ, per entendre l'espai de deformacions quasiconformes $\mathrm{Def}(\Gamma)$ definit per (1) podem fer servir coeficients de Beltrami i el teorema d'integrabilitat. Concretament, triem coeficients de Beltrami $\mu \in L^\infty(\hat{\mathbb{C}})$ invariants per Γ: $\gamma^*\mu = \mu$ per a tot $\gamma \in \Gamma$. D'aquesta manera garantim que si $\phi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ és una aplicació quasiconforme amb coeficient de Beltrami μ, és a dir, compleix $\partial_{\bar{z}}\phi = \mu(z)\partial_z\phi$, aleshores $\phi \circ \Gamma \circ \phi^{-1}$ és un grup discret de Möbius, és a dir, $\phi \circ \Gamma \circ \phi^{-1} \in \mathrm{Def}(\Gamma)$.

4.3 Idea de la demostració dels dos teoremes

En aquesta secció exposem la idea de la demostració de Sullivan, que serveix per als dos teoremes, i veiem com s'aplica en cada cas.

Comencem pel teorema de no existència de dominis errants. Sigui f una funció racional de grau $d \geq 2$. Recordem que un domini errant per f és un component de Fatou U tal que $f^n(U) \neq f^m(U)$ per a qualsevol $m \neq n$. Observem primer que Rat_d, l'espai de funcions racionals de grau d, pot ser identificat (via els coeficients i certes normalitzacions) amb $\mathbb{C}^{2d+1}$, és a dir, amb un espai vectorial complex de dimensió finita.

Suposem ara que U és un component errant de $F(f)$. Aleshores, Sullivan demostra que existeix un espai de coeficients de Beltrami «no equivalents» amb suport a U, de dimensió arbitràriament alta. Hom pot fer servir f per estendre aquests coeficients a tot $F(f)$ de manera compatible amb la dinàmica, i de fet a tot $\hat{\mathbb{C}}$. Això permet aplicar el teorema d'integrabilitat MRMT (teorema 16) per obtenir un espai de deformacions quasiconformes de f no equivalents entre elles de dimensió arbitrària, i, per tant, un subespai de Rat_d de dimensió tan gran com vulguem, la qual cosa és una contradicció.

A continuació considerem Γ un grup kleinià amb un nombre finit de generadors. En aquest cas volem explicar la demostració de Sullivan de la proposició 7: volem veure que, per a tot component connex $\Omega_0 \subset \Omega(\Gamma)$ del domini de discontinuïtat, el conjunt límit de l'estabilitzador $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Omega_0 = \Omega_0\}$ és tota la frontera $\partial\Omega_0$. Anàlogament al cas de funcions racionals de grau donat, l'espai de deformacions quasiconformes de Γ, $\mathrm{Def}(\Gamma)$, té dimensió finita. El motiu és que $\mathrm{Def}(\Gamma)$ és un subconjunt de l'espai de representacions $\hom(\Gamma, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$, que és un conjunt algebraic de dimensió finita quan Γ és finitament generat (un morfisme de Γ a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ està determinat per la imatge dels generadors, és a dir, per un nombre finit de matrius de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ [4, 17]).

Per contradicció, suposem que el conjunt límit de Γ_0 no és tota la frontera de Ω_0, $\Lambda(\Gamma_0) \neq \partial\Omega_0$. Com que $\Lambda(\Gamma_0)$ és tancat, existeix un subconjunt obert $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ amb $V \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$ i $V \cap \Lambda(\Gamma_0) = \emptyset$. De manera anàloga al teorema de components no errants, Sullivan construeix un espai de coeficients de Beltrami de dimensió infinita que són Γ-equivariants. El fet que l'obert V sigui disjunt del conjunt límit de Γ_0 permet escollir els coeficients de Beltrami que s'anul·lin en $V \cap \Omega_0$. Per tant, la integració d'aquests coeficients són funcions holomorfes a $V \cap \Omega_0$, i això ens permet construir coeficients que, quan els integrem, difereixen a $V \cap \partial\Omega_0$. D'aquesta manera es construeix un espai de funcions quasiconformes de dimensió infinita, $\dim(\mathrm{Def}(\Gamma)) = \infty$, i s'obté una contradicció.

Addicionalment, observem que, com que la dimensió de $\mathrm{Def}(\Gamma)$ és finita, si Ω/Γ tingués un nombre infinit de components connexos, aleshores gairebé tots haurien de ser rígids, és a dir, tenir espai de deformacions trivials. Les úniques superfícies de Riemann rígides de tipus finit són esferes sense tres punts, i Greenberg donà un argument algebraic per veure que n'hi ha un nombre finit a Ω/Γ [14].

Per a una demostració rigorosa de cada un dels teoremes podem consultar [33], o també [1, 8, 21, 10, 17].

4.4 El diccionari de Sullivan

Al final de l'article, Sullivan observa que els dos teoremes són dos resultats de finitud en sistemes dinàmics conformes basats en el teorema d'integrabilitat o *measurable Riemann mapping theorem*. Però l'analogia va més lluny i en un article posterior a *Acta Mathematica* [34] aplica idees de funcions holomorfes i dinàmica de [20] per a l'estudi de grups kleinians.

El lector deu haver observat la semblança de les figures de conjunts límit de grups kleinians i conjunts de Julia d'aplicacions racionals. No només s'assemblen visualment, sinó que comparteixen propietats com ara ser tancats i perfectes. A la introducció del mateix article de què estem parlant [33], Sullivan remarca aquesta i altres semblances i formula un «diccionari». El diccionari proposa l'analogia entre una transformació racional f de grau $d \geq 2$ i un grup kleinià no elemental Γ de n generadors. En el primer cas, l'espai de deformacions de f té $2d - 2$ paràmetres complexos; en el segon cas, γ en té $3n - 3$. El conjunt de Julia $J(f)$ es correspon al conjunt límit $\Lambda(\Gamma)$ i comparteixen la propietat abans esmentada de ser tancats i perfectes. El conjunt de Fatou $F(f)$ i el domini de discontinuïtat $\Omega(\Gamma)$ també es corresponen en aquest diccionari, i comparteixen el fet que tant el nombre de components connexos de $F(f)$ com el $\Omega(\Gamma)$ poden ser 0, 1, 2 o ∞. Els dos teoremes, el de finitud d'Ahlfors i el de no existència de dominis errants de Sullivan, formen una analogia al diccionari. El diccionari és molt més llarg i ha evolucionant amb el temps des de la proposta original; el lector interessat pot consultar, per exemple, [10] o [25].

Per acabar, esperem haver justificat amb un exemple el que diu la darrera frase de la citació del premi Abel sobre Dennis Sullivan: «his capacity to see analogues between diverse areas of mathematics and build bridges between them, has forever changed the field».

Referències

[1] AHLFORS, L. V. «Finitely generated Kleinian groups». *Amer. J. Math.*, 86 (1964), 413–429.

[2] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. 2a ed. Amb capítols suplementaris de C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura i J. H. Hubbard.

Providence, RI: American Mathematical Society, 2006. (Univ. Lecture Ser.; 38)

[3] Ahlfors, L.; Bers, L. «Riemann's mapping theorem for variable metrics». *Ann. of Math. (2)*, 72 (1960), 385–404.

[4] Anderson, J. W. «A brief survey of the deformation theory of Kleinian groups». A: *The Epstein birthday schrift*. Coventry: Geometry & Topology Publications, 1998, 23–49. (Geom. Topol. Monogr.; 1)

[5] Baker, I. N. «An entire function which has wandering domains». *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 22 (2) (1976), 173–176.

[6] Bayer, P- «Les contribucions de Poincaré a l'aritmètica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 21 (1) (2006), 5–38.

[7] Beardon, A. F. *Iteration of Rational Functions. Complex Analytic Dynamical Systems*. Nova York: Springer-Verlag, 1991. (Grad. Texts in Math.; 132)

[8] Bers, L. «On Sullivan's proof of the finiteness theorem and the eventual periodicity theorem». *Amer. J. Math.*, 109 (5) (1987), 833–852.

[9] Boyarskiĭ, B. V. «Homeomorphic solutions of Beltrami systems». *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 102 (1955), 661–664. (En rus)

[10] Branner, B.; Fagella, N. *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. (Cambridge Stud. Adv. Math.; 141)

[11] Carleson, L.; Gamelin, T. W. *Complex Dynamics*. Nova York: Springer-Verlag, 1993. (Universitext Tracts Math.)

[12] Donaldson, S. *Riemann Surfaces*. Oxford: Oxford University Press, 2011. (Oxf. Grad. Texts Math.; 22)

[13] Fatou, P. «Sur les équations fonctionnelles». *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), 161–271.

[14] Greenberg, L. «On a theorem of Ahlfors and conjugate subgroups of Kleinian groups». *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 56–68.

[15] Herman, M.-R. «Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 49 (1979), 5–233.

[16] Julia, G. «Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles». *J. Math. Pures Appl. (8)*, 1 (1918) 47–245.

[17] Kapovich, M. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2001. (Progr. Math.; 183)

[18] Klein, F. «Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie». *Math. Ann.*, 21 (2) (1883), 141–218.

[19] Lehto, O.; Virtanen, K. I. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. 2a ed. Traduït de l'alemany per K. W. Lucas. Nova York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 126)

[20] Mañé, R.; Sad, P.; Sullivan, D. «On the dynamics of rational maps». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16 (2) (1983), 193–217.

[21] McMullen, C. T.; Sullivan, D. P. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system». *Adv. Math.*, 135 (2) (1998), 351–395.

[22] Milnor, J. *Dynamics in One Complex Variable.* 3a ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. (Ann. of Math. Stud.; 160)

[23] Mj, M. «Cannon-Thurston maps for surface groups». *Ann. of Math. (2)*, 179 (1) (2014), 1–80.

[24] Montel, P. «Sur les familles complexes et leurs applications». *Acta Math.*, 49 (1-2) (1926), 115–161.

[25] Morosawa, S.; Nishimura, Y.; Taniguchi, M.; Ueda, T. *Holomorphic Dynamics.* Traduït de l'original japonès de 1995 i revisat pels autors. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Stud. Adv. Math.; 66)

[26] Morrey, C. B., Jr. «On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1) (1938), 126–166.

[27] Pérez Marco, R. «Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312 (7) (1991), 533–536.

[28] Pérez-Marco, R. «Fixed points and circle maps». *Acta Math.*, 179 (2) (1997), 243–294.

[29] Poincaré, H. «Théorie des groupes fuchsiens». *Acta Math.*, 1 (1) (1882), 1–76.

[30] Poincaré, H. «Mémoire sur les groupes kleinéens». *Acta Math.*, 3 (1) (1883), 49–92.

[31] Schottky, F. «Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen». *J. Reine Angew. Math.*, 83 (1877), 300–351.

[32] Siegel, C. L. «Iteration of analytic functions». *Ann. of Math. (2)*, 43 (1942), 607–612.

[33] Sullivan, D. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains». *Ann. of Math. (2)*, 122 (3) (1985), 401–418.

[34] Sullivan, D. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups». *Acta Math.*, 155 (3-4) (1985), 243–260.

[35] Thurston, W. P. «Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6 (3) (1982), 357–381.

[36] Yoccoz, J.-C. «Structure des orbites de homéomorphismes analytiques posedant un point critique». [Inèdit]

[37] Yoccoz, J.-C. «Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306 (1) (1988), 55–58.

Núria Fagella
Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
i Centre de Recerca Matemàtica
Edifici C, Campus de la UAB
08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès)
nfagella@ub.edu

Joan Porti
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
i Centre de Recerca Matemàtica
Edifici C, Campus de la UAB
08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès)
joan.porti@uab.cat